分块矩阵

林胤榜

同济大学数学科学学院

2023 年 10 月 27 日

主要内容

1 分块矩阵

2 分块矩阵的运算

3 分块矩阵的应用

分块矩阵

评述

将大矩阵分成若干小块矩阵, 可以给记号和计算带来便利.

分块矩阵

评述

将大矩阵分成若干小块矩阵, 可以给记号和计算带来便利.

对以下矩阵进行分块:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

考虑它诱导的线性映射

$$L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

的效果: 取 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 依据 A 的分块对 x 分块:

(很快能看到这样分块的原因.)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hdashline x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

记分块以后的矩阵为

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

则

$$L_A(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \hdashline a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13}x_3 \\ \hdashline a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}X_1 \\ A_{21}X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{12}X_2 \\ A_{22}X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \end{pmatrix}.$$

注意到, 这里子矩阵均可相乘.

总结: 分块矩阵的相乘和矩阵相乘的形式一致.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \end{pmatrix}.$$

定义

上面 A_{11}，A_{12}，A_{21}，A_{22} 称为**分块矩阵**的**子块**.

总结: 分块矩阵的相乘和矩阵相乘的形式一致.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \end{pmatrix}.$$

定义

上面 A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} 称为**分块矩阵**的**子块**.

注意: 对一个给定的矩阵, 可以有多种方式对矩阵进行分块.

分块矩阵的运算

1. 同型分块矩阵可以逐块相加: 假设 A 和 B 是同型矩阵, 采用相同的分块法, 有

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \quad 和 \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 和 B_{ij} 是同型矩阵. 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

2 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$,

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & \cdots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}.$$

3 假设对矩阵 $A \in M_{m\times l}$ 和 $B \in M_{l\times n}$ 作以下分块

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

使得 $A_{i1}, \ldots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, \ldots, B_{tj}$ 的行数 $(1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$.

3 假设对矩阵 $A \in M_{m\times l}$ 和 $B \in M_{l\times n}$ 作以下分块

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \quad 和 \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

使得 $A_{i1}, \ldots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, \ldots, B_{tj}$ 的行数 $(1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$.则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} \cdots + A_{it}B_{tj}$.

例子

求 AB:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & O_{2\times 2} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{和} B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

注意到它们可以作为分块矩阵相乘:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & O_{2\times 2} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + OB_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_{11}B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ A_{21}B_1 = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_{22}B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 \end{pmatrix}, \text{所以} AB = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline 16 & 22 \end{array}\right).$$

运算

4 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{1r}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

运算

4 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{1r}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

5 假设 $A \in M_{n\times n}$, 子块只在对角线上非零, 而且对角线上的子块均为方阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_1, \ldots, A_s$ 均为（可能不同大小的）方阵,
则称分块矩阵 A 为**对角分块矩阵**, 且 $|A| = |A_1| \cdot |A_1| \cdots |A_s|$.

由性质 5 可知, 若对任意 i 均有 $|A_i| \neq 0$, 则 $|A| \neq 0$, 而且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例子

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

例子

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&4&5\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

注意到, 可以对矩阵进行分块使得它成为对角分块矩阵. 令 $B=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$. 求 B^{-1}: 首先, $|B|=-2$, 然后 B 的伴随矩阵为 $B^*=\begin{pmatrix}5&-4\\-3&2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}5&-3\\-4&2\end{pmatrix}$. 所以

$$B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\2&-1\end{pmatrix}.$$

则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

分块矩阵的应用

命题

假设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 那么 $A=0$ 当且仅当 $A^TA=0$.

证明.
($\Longrightarrow$) $A=0$ 意味着 A 的各项均为零, 所以结论显然.
($\Longleftarrow$) 以列分块 A: $A=\left(a_1,\ldots,a_n\right)$, 其中 $a_j \in M_{m\times 1}$, 则

$$0=A^TA=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}(a_1,\ldots,a_n)=\begin{pmatrix} a_1^Ta_1 & a_1^Ta_2 & \cdots & a_1^Ta_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n^Ta_1 & a_n^Ta_2 & \cdots & a_n^Ta_n \end{pmatrix}.$$

特别地, $a_j^Ta_j=0,\ 1\leqslant j\leqslant n$.

又 $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$,

$$a_j^T a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}^2 + \cdots + a_{nj}^2,$$

所以 $\forall i, j$, $a_{ij} = 0$. $\square$

又 $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$,

$$a_j^T a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}^2 + \cdots + a_{nj}^2,$$

所以 $\forall i, j$, $a_{ij} = 0$. $\square$

假设 a 是一个列向量, 则 $a^T a$ 是它的长度.

又 $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$,

$$a_j^T a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}^2 + \cdots + a_{nj}^2,$$

所以 $\forall i, j$, $a_{ij} = 0$. □

假设 a 是一个列向量, 则 $a^T a$ 是它的长度.

推论

假设 a 是一个列向量, 则 $a = 0$ 当且仅当 $a^T a = 0$.